Ferienübungen 2010

II. Geometrie

1. Die gerade quadratische Pyramide P ist durch ihre Eckpunkte A (3 | −3 | 12), B (3 | 3 | 12), C (−3 | 3 | 12), D (−3 | −3 | 12) und O (0 | 0 | 0) festgelegt.

a) Tragen Sie die Punkte A, B, C, D und O in ein Koordinatensystem (Einheit 1 cm) ein und zeichnen Sie dann dort ein Schrägbild dieser Pyramide.

b) Berechnen Sie die Größe des Winkels ∢ BOD sowie das Volumen und den Oberflächeninhalt der Pyramide P.

c) Die Pyramide P wird parallel zur x_1-x_2-Ebene durchgeschnitten; dadurch entstehen eine kleinere Pyramide P* und ein Pyramidenstumpf. Berechnen Sie das Volumen des 6 cm hohen Pyramidenstumpfs.

2. Gegeben sind die Punkte A (−4 | 7 | 2) und B (−2 | 9 | 0) sowie der Vektor

$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{4}{a} \\ 2 \\ -\frac{4}{a} \end{pmatrix}$; $a \in \mathbb{R}^+$. Finden Sie heraus, für welchen Wert des Parameters a die Vektoren $\vec{x}$ und $\overrightarrow{AB}$ gleich lang sind.

3. Geben Sie jeweils die Gleichung der Kugel in Koordinatenform an.

a) Die Kugel K_1 hat den Mittelpunkt M (1 | 7 | −4) und die Radiuslänge 5.

b) Die Kugel K_2 hat den Mittelpunkt M (1 | 7 | 4); auf ihr liegt der Punkt A (6 | 7 | −4).

c) Die Kugel K_3 hat den Mittelpunkt M (1 | 7 | 8) und berührt die x_1-x_2-Ebene. Geben Sie die Koordinaten des Berührpunkts B an.

4. Finden Sie heraus, welche Lage die Punkte O (0 | 0 | 0), S (9 | 9 | −2) und T (4 | −1 | 7) in Bezug auf die Kugel K: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6x_1 - 8x_2 - 4x_3 = 140$ besitzen.

5. Zeigen Sie, dass die Punkte A (4 | −4 | 3), B (−1 | −1 | −1) und C (4 | 2 | −5) ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck bilden. Der Punkt B ist Mittelpunkt einer Kugel K, auf der die Punkte A und C liegen. Geben Sie die Kugelgleichung in Vektorform an.