

Abituraufgabe ANALYSIS

1. Die Integralfunktion $F : x \rightarrow F(x) = \int_0^x f(t)dt$ mit $f(t) = at^2 + bt + c$ hat an der Stelle $x = 1$ ein relatives Extremum, an der Stelle $x = -\frac{1}{4}$ einen Wendepunkt und an der Stelle $x = 2$ den Wert $F(2) = \frac{2}{3}$.
- a) Bestimmen die Koeffizienten a , b und c , geben Sie $f(x)$ an und bestätigen Sie, dass $F(x)$ in integralfreier Form als $F(x) = \frac{1}{12}(4x^3 + 3x^2 - 18x)$ geschrieben werden kann.
- b) Berechnen Sie den Inhalt jenes Flächenstücks A , welches der Graph von f mit der x -Achse einschließt.
- c) Wie lässt sich A durch Funktionswerte von F darstellen?
2. Gegeben sei die Funktion $g : x \rightarrow g(x) = x^3 + 2x$ mit $D = \mathbb{R}$.
- a) Geben Sie eine integralfreie Form jener Integralfunktion G_1 von g an, die an der Stelle $x = 1$ eine Nullstelle besitzt.
- b) Bestimmen Sie jene Stammfunktion G_2 von g , die den Punkt $P(-2;10)$ enthält.
- c) Zeigen Sie, dass die in b) bestimmte Funktion G_2 keine Integralfunktion zu g ist.
3. Gegeben sei die Funktionenschar $f_c : x \mapsto f_c(x) = \frac{1}{3}(cx^2 - 2x^3)$ mit $D = \mathbb{R}$ und $c > 0$.
- a) Bestimmen Sie, abhängig von c , Nullstellen, Lage und Art der Extremstellen, sowie die Wendepunkte der Schar.
- b) Zeichnen Sie für $c = 3$ und $c = 6$ die Graphen der zugehörigen Scharkurven.
- c) Die Gerade g schneidet die Scharkurve zu f_c in den Punkten $P(0;?)$ und $Q(c;?)$. Zeigen Sie, dass g in der Form $g : c^2x + 3y = 0$ geschrieben werden kann.
- d) Berechnen Sie den Inhalt jenes Flächenstücks, welches ganz von g und dem Graphen von f_c eingeschlossen wird.
- e) Für welchen Wert von c nimmt dieses Flächenstück den Wert $\frac{16}{9}$ an?