Analytische Geometrie I – Lösungen

1. Es ist $-\frac{8}{6}\vec{u} = \vec{v}$, also sind die beiden Richtungsvektoren kollinear. Ferner liegt A (Startpunkt von g_1) nicht auf g_2. Deshalb sind die beiden Geraden echt parallel und legen somit eine Ebene fest.

   PF: $E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, vereinfacht: $E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   KF: Normalenvektor $\vec{n}_{E_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

   damit wird $E_1 : \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = 0$ oder $E_1 : 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 8 = 0$

2. Die Schnittpunkte mit den Achsen ergeben sich aus der Aschenabschnittsform:

   AF: $\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2} = 1$. Also: $X_1(4 | 0 | 0)$, $X_2(0 | 2 | 0)$ und $X_3(0 | 0 | 2)$.

3. ./.

4. E_2 hat den gleichen Normalenvektor wie E_1, also $E_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right] = 0$,

   vereinfacht: $E_2 : x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 7 = 0$.

5. Der Richtungsvektor der Geraden ist der Normalenvektor der beiden Ebenen, also ist

   l: $\vec{x} = \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

   Durch Einsetzen in E_1 bzw. E_2 erhält man $\nu_1 = \frac{4}{9}$ und $\nu_2 = -\frac{7}{9}$. Damit ergeben sich die beiden Schnittpunkte als $P_1\left(\frac{4}{9} | \frac{8}{9} | \frac{8}{9}\right)$ und $P_2\left(-\frac{7}{9} | -\frac{14}{9} | -\frac{14}{9}\right)$ und der Abstand als $\frac{33}{9}$.

6. $g_{TS} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$. Einsetzen in E_1 liefert $\sigma = 2$ und damit $F(10 | -3 | -27)$

   Der Winkel zwischen dem Normalenvektor der Ebene und dem Richtungsvektor der Geraden ist $\alpha^* = 45°$, also auch der Winkel zwischen der Geraden und der Ebene.