Übungen aus gegebenem Anlass – 2 - Ergebnisse

1. Berechnen Sie $\int_3^6 \frac{2x+1}{x^2+x-5}dx$

   Dieses Integral ist nicht berechenbar, weil im Integrationsbereich einer der Pole liegt.

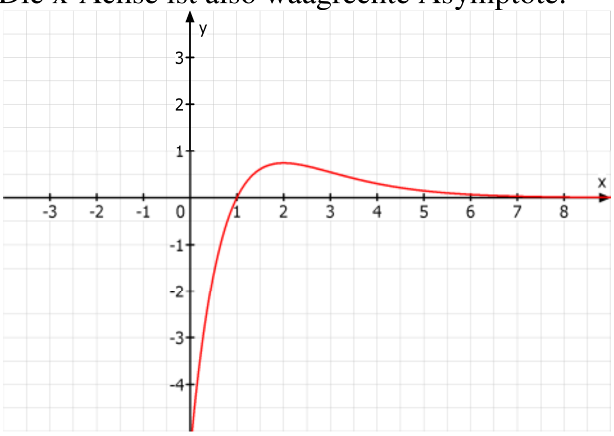
2. Berechnen Sie jene Fläche, welche der Graph der Funktion $f : x \mapsto f(x) = \frac{x^3}{9} - 3x + 3$ mit der Geraden durch die beiden Extremstellen einschließt.
   Zeigen Sie, dass der Wendepunkt von f diese Fläche halbiert.
   Die beiden Extremstellen ergeben sich aus der ersten Ableitung $f'(x) = \frac{x^2}{3} - 3$.
   $f'(x) = 0$ *liefert die Ordinaten der Extremstellen* $x_1 = -3$ *und* $x_2 = +3$.
   Damit $E_1(3 \mid -3)$ *und* $E_2(-3 \mid 9)$.
   Die Gerade durch E_1 *und* E_2 *hat die Gleichung g:* $y = -2x + 3$.
   Die Fläche zwischen dem Graphen und der geraden ist dann $A = \int_{-3}^{0} |f(x) - g(x)| dx + \int_0^3 |g(x) - f(x)| dx = \cdots = 4{,}5[FE]$.
   Der Wendepunkt teilt diese Fläche, da W die Strecke zwischen E_1 *und* E_2 *teilt.*

3. Gegeben sei die Funktion $f : x \mapsto 2(x-1)e^{1-x}$ mit $x \in D_f = \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen und Extrema von f. Geben Sie jene Intervalle an, in denen f streng monoton fällt bzw. steigt. Untersuchen Sie f auf Wendepunkte.
   Nullstellen: $x = 1$, *da* $e^{1-x} \neq 0$.
   $f'(x) = 2(2-x)e^{1-x}$. *Einzige Nullstelle ist* $x = 2$. *Für* $x < 2$ *ist* $f'(x) > 0$, *also f sms; für* $x > 2$ *ist* $f'(x) < 0$, *also f smf. An der Stelle* $E(2 \mid \frac{2}{e})$ *liegt das Maximum von f.*
   $f''(x) = 2(x-3)e^{1-x}$. *Wendepunkt liegt bei* $W(3 \mid \frac{4}{e^2})$

b) Untersuchen Sie das Verhalten von f im Unendlichen und zeigen Sie damit, dass f eine horizontale Asymptote besitzt. Geben Sie diese an.
   $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Die x-Achse ist also waagrechte Asymptote.

c)



d) Gegeben sei die Funktion $F : x \mapsto F(x) = \frac{-2x}{e^{x-1}}$. Zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion von f ist.
   Nach dem HDI ist $F'(x) = f(x)$, *also ist F Stammfunktion von f.*

e) Bestimmen Sie den Inhalt jenes Flächenstücks, welches der Graph von f zwischen x = 1 und x = a > 1 mit der x - Achse einschließt. Zeigen Sie, dass dieses Flächenstück einen endlichen Flächeninhalt besitzt, wenn $a \to +\infty$ geht.

$$\int_1^a f(x)dx = [F(a)] - [F(1)] = \frac{-2a}{e^{a-1}} + 2.$$

Da für $x \to +\infty$ *der erste Term gegen Null geht, hat das Integral einen endlichen Wert, nämlich 2.*