Übungen aus gegebenem Anlass – 3 – Lösungen

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -3 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + 3$.

a) Beschreiben Sie, wie der Graph von f aus dem Graphen der $e(x) = e^x$ hervorgeht.

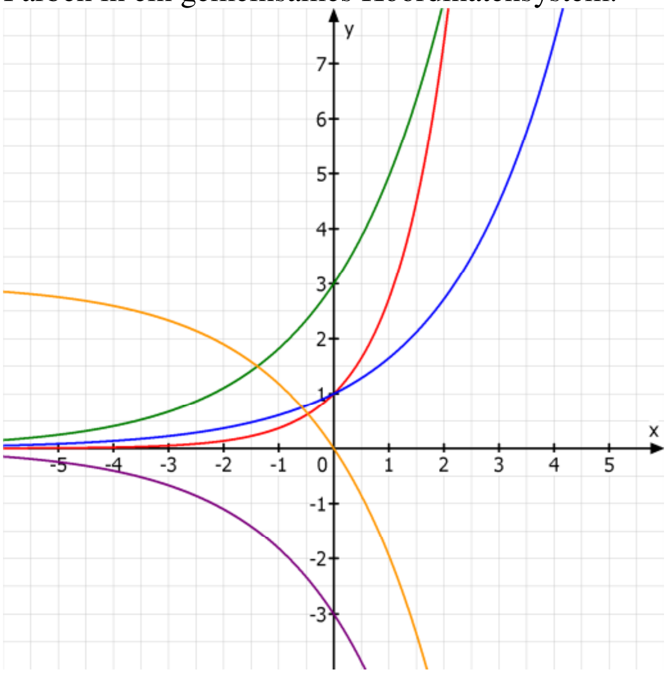
$e^x \to e^{\frac{1}{2}x}$ *Streckung in x-Richtung mit Faktor 2*

$e^{\frac{1}{2}x} \to 3e^{\frac{1}{2}x}$ *Streckung in y-Richtug mit Faktor 3*

$3e^{\frac{1}{2}x} \to -3e^{\frac{1}{2}x}$ *Spiegelung an der y-Achse*

$-3e^{\frac{1}{2}x} \to -3e^{\frac{1}{2}x}+3$ *Verschiebung in y-Richtung um +3*

b) Zeichnen Sie die Zwischenschritte der Entstehung des Graphen mit verschiedenen Farben in ein gemeinsames Koordinatensystem.



2. Die Funktion $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ sei gegeben.

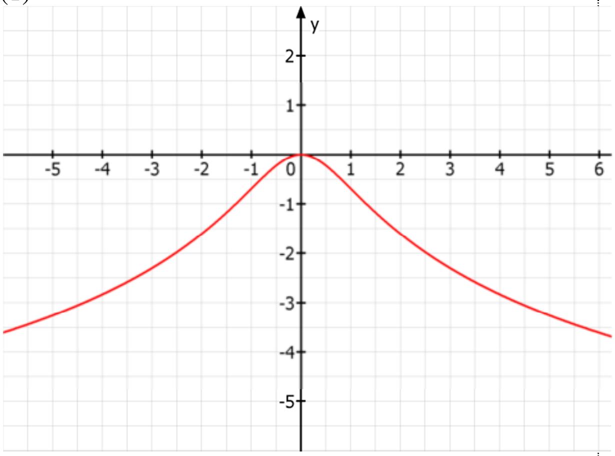
a) Begründen Sie, dass f überall in R definiert ist und die x-Achse nicht schneidet.
D_f = R, da $x^2 + 1 > 0$ für alle x.
Nullstelle: $\ln(x^2 + 1) = 0 \leftrightarrow x^2 + 1 = 1 \leftrightarrow x^2 = 0 \leftrightarrow x = 0$.
Es liegt eine doppelte Nullstelle vor, also eine Berührstelle. Deshalb schneidet f die x-Achse nicht.

b) Bestimmen Sie die Monotonieintervalle und zeigen Sie, dass das Extremum von f auf der y-Achse liegt.
$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. *Da der Nenner stets positiv ist, ist das Vorzeichen des Zählers maßgeblich für das Monotonie. Also ist f sms für x > 0 und smf für x < 0.*
Die In 1a) gefundene Berührstelle ist also (absolutes) Minimum von f. Min(0 | 0).

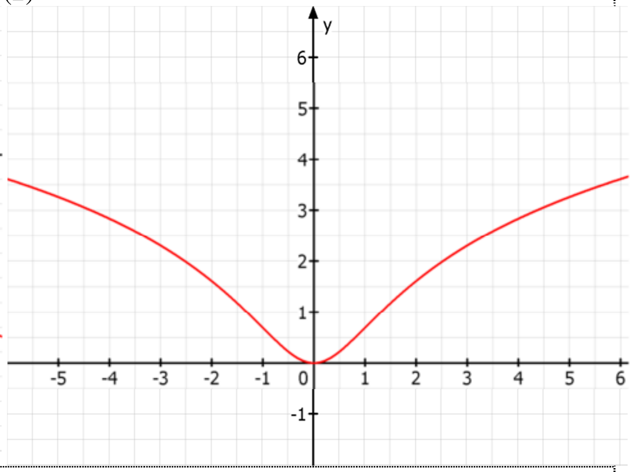
c) Bestimmen Sie die Koordinaten der beiden Wendepunkte von f.
$f''(x) = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$. *Der Zähler ist 0, wenn $x^2 = 1$ ist, also liegen die beiden Wendepunkte bei $x = \pm 1$. Die Koordinaten sind dann jeweils ln 2.*
Also gilt für die Wendepunkte W(± 1 | $\ln 2$)

d) Welcher der Graphen (1), (2), (3) oder (4) gehört zur Funktion? Begründung!
Wegen Monotonie, Minimum und Wendepunkte, ist (2) der richtige Graph.

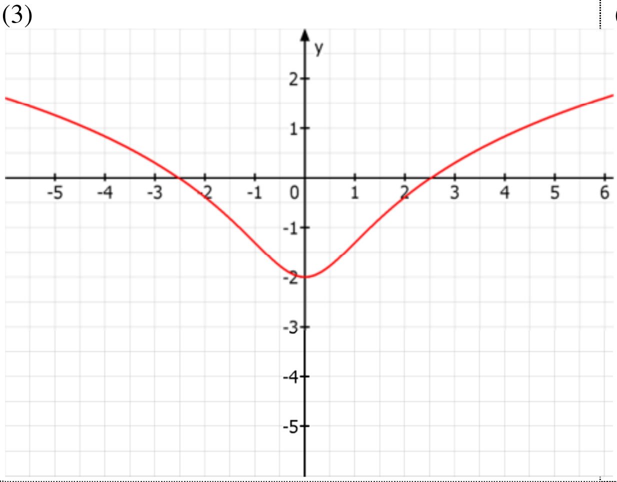
(1)



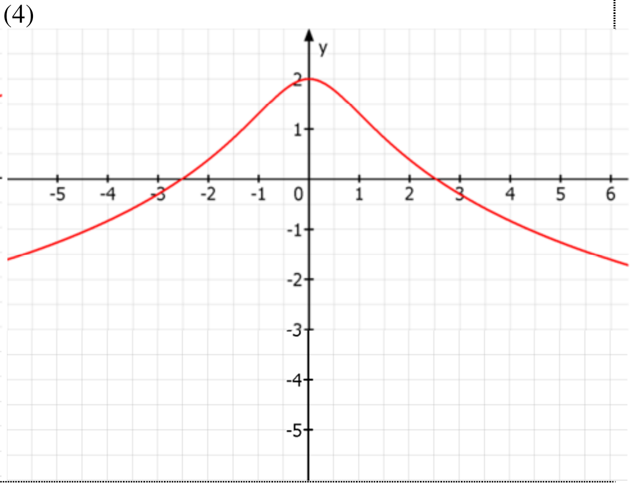
(2)



(3)



(4)



3. Bestimmen Sie den Grenzwert der Funktion $f(x) = 1 - e^{-2x^2}$ für $x \to \pm\infty$.
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - e^{-2x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{e^{2x^2}}\right) = 1$, da der Exponentialterm im Nenner stets gegen plus Unendlich geht.
Wegen der Achsensymmetrie der Funktion gilt das Gleiche für $x \to -\infty$.